山东大学数学学院
2010级泛函分析期末试题

注意: 所有数学符号都是使用教材中的标准符号. 所有试题请写出详细计算或证明过程. 时间: 2013/01/17, 14:00-16:00.

1(20'), (1), 叙述并证明Riesz引理.
(2), 设X是赋范线性空间. 若X中任一有界集都是列紧集, 则X为有限维空间. 试利用Riesz引理证明之.

2(10'), 设 M 是Hilbert 空间 H 的线性流形. 证明: $(\overline{M})^{\perp} = M^{\perp}$ 和 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

3(25'), (1), 叙述并证明一致有界定理(共鸣定理).
(2), 设X, Y都是赋范线性空间, $X \neq \{0\}$. 证明: 若$L(X, Y)$是Banach空间, 则Y必是Banach空间.

4(10') 设 X 是 Hilbert 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, x \in X$. 证明: $x_n \to x$ 当且仅当 $x_n \xrightarrow{w} x$ 且$\|x_n\| \to \|x\|$.

5(25'), 设赋范线性空间 $C[0,1]$, 对任意的 $x \in C[0,1]$ 其范数为 $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$. 定义其上的算子 T, S 分别为

$$T : x(t) \longmapsto tx(t),$$

$$S : x(t) \longmapsto t \int_0^1 x(t)dt.$$

(1), 求范数 $\|T\|$, $\|S\|$, $\|TS\|$ 以及$\|ST\|$.
(2), 求T的谱集: $\sigma_p(T), \sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$.

6(10'), 令$\ell^2 = \{x = (x_i) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$, 范数定义为 $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$. 设$\{a_i\}$为一给定数列, 定义算子

$$T : (x_1, x_2, x_3, ...) \longmapsto (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, ...).$$

则T是紧线性算子当且仅当$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.