山东大学数学学院
2009级实变函数论期末试题

注意: (a), 若无特殊说明集合E均为$\mathbb{R}^n$空间中的点集.
(b), 所有试题请写出详细计算或证明过程.

2011/06/24, 9:00–11:00

1.(10') 设$f(x)$ 是$\mathbb{R}$上的实值连续函数. 证明对于任意常数c, $\{x \mid f(x) > c\}$ 都是开集; $\{x \mid f(x) \geq c\}$都是闭集.

2.(10') 设 $E \subset \mathbb{R}$, $0 \leq \mu \leq m^*E$. 证明存在 $F \subset E$, 使得 $m^*F = \mu$.

3.(10') 设$mE = 1$且$\{E_k\}_{k=1}^n$为E的n个可测子集, 若 $\sum\limits_{k=1}^n mE_k > n-1$, 则

$$m\left(\bigcap_{k=1}^n E_k\right) > 0.$$

4.(15') (i), 试叙述 $Lusin$ 定理和其逆定理.
(ii), 证明 $Lusin$ 逆定理.

5.(15') 设$f(x)$ 为可测集E上的可积函数, 令$E_n = E[|f| \geq n]$, 则
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} mE_n = 0$ 和 (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\, mE_n = 0$.

6.(10') 求极限,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}}\,dx.$$

7.(15') 设 $\{f_n(x)\}$是E上的非负可积函数列且满足: (i), $f_n(x)$ 依测度收敛于$f(x)$, 和(ii), $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = 0$, 则$f(x) = 0$ 在E上$a.e.$成立.

8.(15') (i) 试叙述$[a,b]$上有界变差函数的定义和绝对连续函数的定义.
(ii) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 满足$Lipschitz$ 条件, 即存在常数$L > 0$, 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

成立, 则$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数.
(iii) 证明: $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 满足$Lipschitz$ 条件的充要条件是$f(x)$在$[a,b]$可表为某个有界可测函数的不定积分.