复变函数论补充作业

☞

1, 证明函数$f(z)=\mathrm{Re}z$处处连续而处处不可导.
2, 证明函数$f(z)=x^3-iy^3$仅在原点有导数, 从而处处不解析.
3, 考察函数

$$f(z)=\begin{cases} |z|(1+i), & xy\neq 0; \\ 0, & xy=0 \end{cases}$$

在原点(0,0)偏导数u_x,u_y,v_x,v_y是否存在? 是否满足$C-R$方程? 函数$f(z)$是 否在原点可微?
4, 考查函数$f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i$的可微性和解析性.

☞

5, 若函数$f(z)$在区域D内解析, 且满足下列条件之一: (1), $\mathrm{Re}f(z)$在D内恒为常数; (2), $\mathrm{Im}f(z)$在D内恒为常数; (3), $|f(z)|$在D内恒为常数. 则$f(z)$在D内恒为常数.
6, 若函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析, 且满足$u=v^2$, 则$f(z)$在D内恒为常数.
7, 在极坐标下$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, 其中$z=re^{i\theta}$, 则$C-R$方程为

$$u'_r=\frac{1}{r}v'_\theta, \quad v'_r=-\frac{1}{r}u'_\theta,$$

且有

$$f'(z)=\frac{r}{z}(u'_r+iv'_r).$$

☞

8, 求值: $e^{3+i},\sin i,\cos(2+i)$.
9, 求值并指出其主值: $\mathrm{Ln}i,\mathrm{Ln}(2-3i),2^i,i^i,(1+i)^{\frac{1}{4}},(1+i)^{\frac{i}{4}},(-1)^{2i}$.
10, 确定 z^z 的实部和虚部, 其中$z=x+iy$.

☞

11, 计算积分

$$\int_C \mathrm{Re}(z^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中积分路径C为原点到点i的直线段, 再有点i到点$1+i$的直线段.
12, 计算积分

$$\int_C |z-1|\,|\mathrm{d}z|,$$

其中积分路径$C:e^{it},0\leq t\leq 2\pi$.

13, 计算下列积分:

$$\int_{|z|=r} \ln(1+z)\mathrm{d}z,\ (0<r<1);$$

$$\int_0^{i\pi} \cos z\mathrm{d}z;$$

$$\int_{|z|=\frac{1}{6}} \frac{1}{z(3z+1)}\mathrm{d}z.$$

14, 设曲线$C:|z|=1, y\geq 0$. 求积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}z}{z},\quad \text{其中积分路径为}C.$$

✍ 课外思考题, 可不交作业:

15, **闭集套定理:** 若$F_n\subset\mathbb{C}, n=1,2,\cdots$为无穷个有界闭集, 且 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$, $\lim_{n\to\infty} d(F_n)=0$, 其中$d(F_n)=\sup\{|z_1-z_2|, \forall z_1,z_2\in F_n\}$. 则存在唯一的点$z_0\in F_n, n=1,2,\cdots$.

16, **实数集完备性的基本定理:** 证明下列命题相互等价

❶, 确界定理: 设S为非空数集, 若S有上界, 则必有上确界.

❷, 单调有界数列必收敛.

❸, 区间套定理.

❹, 聚点定理: 实数轴上的任意有界无限点集必有聚点.

❺, 有限覆盖定理: 闭区间的开覆盖必存在有限子覆盖.

❻, 柯西收敛定理: 数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛的充要条件是: $\forall\epsilon>0, \exists N>0$, s.t. 当 $n,m>N$时, 有$|a_n-a_m|<\epsilon$.

17, 计算积分

①

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^3(z-3)^3};$$

②

$$\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)^3 \mathrm{d}z;$$

③

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)};$$

④

$$\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z};$$

⑤ 根据④证明:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta = 2\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

18, 设

$$f(z)=\int_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

求$f'(1+i)$的值.

19, 设在$|z|<1$上$f(z)$解析, 且$|f(z)|<1$, 则$|f'(0)|\leq 1$, 并指出何时等号成立.

20, 设在$|z|<1$上$f(z)$解析, 且$|f(z)|\leq \frac{1}{1-|z|}$, 则

$$|f^{(n)}(0)|\leq (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

21, 设$f(z)=u+iv$为解析函数, 则

$$\left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial y}\right)^2=|f'(z)|^2,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

22, 设$f(z)$为一整函数. 证明对任意的$z\in\mathbb{C}$, 满足下列条件之一: (1), $\Re f(z)>0$; (2), $\Re f(z)$ 有界; (3), $\exists c>0$, s.t. $|f(z)|>c$, 则$f(z)$为常数函数.

23, 设$f(z)$为整函数且$|f(z)|=O(|z|^n), z\to\infty$. 则$f(z)$是一次数$\leq n$的多项式.

24, (Generalized Schwartz Lemma) 设函数$f(z)$在圆内$|z|<r$解析, 且$|f(z)|\leq M, f(0)=0$, 则

$$|f(z)|\leq \frac{M}{r}|z|,\quad |f'(0)|\leq \frac{M}{r},$$

其中等号当且仅当$f(z)=\frac{M}{r}e^{i\theta}z, \forall\theta\in\mathbb{R}$时成立.

25, 设函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析, 且$|f(z)|<1$, 则在单位圆内恒有

(i),

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-f(z_1)\overline{f(z_2)}}\right|\leq\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right|;$$

(ii), (Schwartz-Pick Lemma)

$$|f'(z)|\leq\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

✍ 课外思考题, 可不交作业:

26, (S.T. Yau College Student Mathematics Contests 2010)

Let $f(z)$ be holomorphic in $D:|z|<1$ and $|f(z)|\leq 1$ for all $z\in D$. Prove that

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1+|f(0)||z|}\leq |f(z)|\leq\frac{|f(0)|+|z|}{1-|f(0)||z|},\quad z\in D.$$

Remark: In fact, we have a stronger result

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)||z|}\leq |f(z)|\leq\frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|},\quad z\in D.$$

27, (S.T. Yau College Student Mathematics Contests 2010)

For any finite complex value a, prove that

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta=\max\{\log|a|,0\}.$$

28, 设$f(z)$在单位圆内全纯, 且$f(0)=0$, $\Re f(z)\le A(A>0)$, 则在单位圆内

$$f(z)\le 2A\frac{|z|}{1-|z|}.$$

29, (1), 若$f(z)$在$|z-a|<R$内解析, 则对$0<r<R$, 有

$$f'(a)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\Re\{f(a+re^{i\theta})\}e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

(2), 若$f(z)$在$|z-a|<R$内解析, 且$|\Re f(z)|\le M$, 则 $|f'(a)|\le 2M/R$.

30, 设$f(z)$为首项系数为1的复系数n次多项式. 证明:

$$\max_{|z|\le 1}|f(z)|\ge 1.$$

31, (实数项级数Dirichlet判别法和Abel判别法的推广)设复数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足条件: ① $\{S_n\}$有界, 其中 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$; ② $\lim_{n\to\infty}b_n=0$; ③ $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n-1}|<+\infty$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

32, (正项级数Cauchy判别法的推广)设$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$为复数项级数, 且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}=\rho,$$

则 ①, 若$\rho<1$, 则级数绝对收敛; ②, 若$\rho>1$, 则级数发散.

33, 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$的各项在曲线$C$上连续, 且在$C$上一致收敛于 $f(z)$, 则沿C可以逐项积分, 即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z.$$

34, (Weierstrass第二定理)设$D\subset\mathbb{C}$为有界区域, 其边界为∂D. 若$f_n(z)(n=1,2,\cdots)$在D内解析, 在 $\overline{D}=D+\partial D$上连续, 且函数项级数$\sum f_n(z)$在$\partial D$上一致收敛, 则在$\overline{D}$ 上一致收敛.

35, 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^{n+1}$$

的收敛半径, 收敛圆以及和函数.

36,试用不同的方法把函数

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$$

展成$z-1$的幂级数, 并指出其收敛半径和收敛圆.

37, 试问能否构造一在原点解析的函数$f(z)$, 且当$z=1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6,\cdots$时, 函数值 依次为$1/2,1/2,1/4,1/4,1/6,1/6,\cdots$.

38, 设在$|z|<R$内解析的函数$f(z)$有Taylor展式

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots.$$

试证明下列各结论:

①, 当$0\le r<R$时, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

②, 当$0\le r<R$时, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{r}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|^2r^{2n}.$$

③, 若取①式$r=1$, 则有

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|f(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

④, 当$0\le r<R$时, 令 $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$. 若 $f(z)$为非常数函数, 则$M(r)$为严格递增函数, 且有

$$|f(0)|^2\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\le M^2(r),$$

成立.

⑤, 设 $f(z)$在$|z|<R$内有界为M, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2R^{2n}\le M^2.$$

39, ① 在$0<|a|<|z|<|b|$, 将函数

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

展成Laurent级数.

② 在$1/2<|z|<2$内将函数

$$\frac{3z}{(2-z)(2z-1)}$$

展成Laurent级数.

40, 设非常数函数$f(z)$在$0<|z-a|<R$内解析, 若$\Re f(z)$在此去心圆内有界, 则a为$f(z)$的可去奇点.

41, 设

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-1)}.$$

①, 函数有哪些孤立奇点? 属于何种类型?

②, 求出函数分别在$0<|z|<1$和$|z|>1$内的Laurent展式.

42 判定下列函数各有限奇点的类型, 若为极点并求极点的阶

$$(1),\frac{z-1}{z(z^2+4)};\quad (2),\frac{1}{e^z-1};\quad (3),\frac{1-\cos z}{z^2}.$$

43, 设

$$f(z)=\frac{2z^3+1}{z(z+1)}.$$

在开域$0<|z|<1$和$|z|>1$中分别将 $f(z)$展成z幂的Laurent级数.

44 若函数$f(z)$在$0<|z-a|<R$内解析, 且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0.$$

证明: a是函数$f(z)$的可去奇点.

45 求下列函数在指定点的留数

① $\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$在$z=1,-1$; ② $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$在$z=0$; ③ $e^{\frac{1}{z-1}}$在$z=1$.

46 利用留数定理计算复积分

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^2-2)},\quad \int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}.$$

✍ 课外思考题, 可不交作业:

47, Show that:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{if}\quad 0<x<1;\\ \frac{1}{2}, & \text{if}\quad x=1;\\ 1, & \text{if}\quad x>1.\end{cases}$$

48, (**Perron Formula**) Let

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

be Dirichlet series absolutely convergent in $\Re s>\sigma-\epsilon$. Show that if x is not an integer, then

$$\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

49, 求方程$z^4-8z+10=0$在圆$|z|<1$和圆环$1<|z|<3$内的根的个数.

50, 求下列方程在圆$|z|<1$内的根的个数.

$$(1), z^7-4z^3+z-1=0,\qquad (2), 2z^5-z^3+z^2-2z+8=0.$$

51, 设 $f(z)$在$|z|\le 1$上解析, 且有$|f(z)|<1$. 证明: $f(z)$在圆$|z|<1$内有唯一的不动点, 即 $f(z)-z$在圆$|z|<1$内有且仅有一个单零点.

Evaluation of Integrals: Applications of residues

52,

Type I:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}(a>b>0);$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{2+\cos\theta} = 2\pi(1-\frac{2}{\sqrt{3}})$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \sqrt{2}\pi$$
$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$$

Type II:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \pi/6$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \pi/2\sqrt{2}$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \pi/6$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx = \pi/200$$
$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} dx = -\pi/10$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Type III:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi/e^3$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+3} dx = \pi/(2\exp(2\sqrt{3}))$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} = \pi(1-1/e^2)/2$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi/2$$

Type IV:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{(x+1)^2} dx = p\pi/\sin p\pi(-1<p<1)$$
$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2+1} dx = \pi^3/8; \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+1} dx = 0$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+4)^2} dx = \pi(\ln 2 - 1)/32$$
$$\left\{ \frac{c}{\frac{DDD}{ABB}} \right\}$$

Guanghua Ji · 纪广华
School of Mathematics
Shandong University

Jinan, Shandong 250100
www.prime.sdu.edu.cn/ghji/guanghuaji.htm