实变函数论补充作业

☞ 第一章: 集合

♠ 2011/02/21

1, 证明:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$(\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)\backslash B = \cup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\backslash B).$$

2, 设$A_{2n-1} = [-1-\frac{1}{n}, 0], A_{2n} = [0, 1+\frac{1}{n}], n = 1, 2, 3, \cdots$, 求 $\limsup A_n, \liminf A_n$.

3, 设$\{A_n\}$为一列集合, 做$B_1 = A_1, B_n = A_n\backslash(\cup_{k=1}^{n-1} A_k), n > 1$. 证明: B_n互不相交, 且$\cup_{k=1}^n B_k = \cup_{k=1}^n A_k, 1 \le n \le \infty$.

4,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cup \underline{\lim_{n\to\infty}} B_n \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} (A_n \cup B_n) \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cup \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n$$
$$\subset \overline{\lim_{n\to\infty}} (A_n \cup B_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cup \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n.$$

♠ 2011/02/24

5, $f : X \to Y$ 是映射, $\forall B \subset Y : f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. 等号当且仅当$f$是满射.

♠ **2**011/02/28

6, 若$\cup_{n=1}^\infty A_n$的基数为c, 则存在k, 使得A_k的基数为c.

7, 若$\{f_n(x)\}$为定义在$\mathbb{R}$上的一列函数. 证明

$$\{x | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\} = \cap_{k=1}^\infty \cup_{N=1}^\infty \cap_{n=N}^\infty \{x | f_n(x) > k\}.$$

8, 设 f 是 $\mathbb{R}$上的单调函数, 则 f至多有可数个间断点.

☞ 第二章: 点集

♠ 2011/03/03

9, 令E为$[0, 1]$中的所有有理点集合, 求$E', E^o, \overline{E}, \partial E$.

♠ 2011/03/07

10, 证明: $\partial E = \overline{E} \setminus E^o$.

11, 若$A \cap B = \emptyset$, 则$\overline{A} \cap B^o = \emptyset$.

12, $\mathbb{R}^n$任一点集的孤立点为至多可数个.

♠ 2011/03/10

13, 闭集套定理:若$\{E_n\}$是非空的有界闭集的递减序列, 则 $\bigcap_{n=1}^\infty E_n \neq \emptyset$. 试指出定理条件:有界和闭集缺一不可, 即举例有界的递减无穷开集序列, 交集为空; 无界的递减的闭集序列交集为空集.

♠ 2011/03/14

14, 设$\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 有
$$\rho(x,E) \leq \rho(x,y) + \rho(y,E).$$
15, 若集合E'可数, 则E可数.

16, 证明$\mathbb{R}^n$中的任何开集都可表为可数个开区间的并.

☞ 第三章: Lebesgue测度

♠ 2011/03/24

17, 设 $m^*(E) = 0$, 对于任意的点集F, 有 $m^*(E \cup F) = m^*(F)$.

18, 在一维闭区间$[a,b]$上能否作一测度为$b-a$, 但又不同于$[a,b]$的闭集?

20, 若E为可数集, 则 $mE = 0$; 反之, 对吗?

♠ 2011/03/31

21, 设 $I = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. 令
$$E = \{(x,y) \in I |\, \sin x < 1/2, \cos(x+y)\text{是无理数}\},$$
求mE的值.

22, 若 $E_n \subset [0,1], mE_n = 1, \forall n \geq 1$, 则
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1.$$
23, 若 $E_k \subset [0,1], k = 1,2,...,n$,为$n$个可测集, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} mE_k > n-1$, 则
$$m\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) > 0.$$

☞ 第四章: 可测函数

24, 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (依)测度收敛于 $f(x)$, 且有 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ 对任意的n, $a.e.$ 成立, 则 $f_n(x)$ $a.e.$ 收敛于 $f(x)$.

25, 证明 $Erogov$ 定理的逆定理成立, 即: 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数, $f(x)$ 为 E 上的函数. 若 $\forall \delta > 0$ 恒存在可测子集 $e \subset E$, 使得 $me < \delta$ 且 $f_n(x)$ 在 $E \setminus e$ 上一致收敛于 $f(x)$. 则有 $f_n(x)$ 在 E 上 $a.e.$ 收敛于 $f(x)$, 且 $f(x)$ 是 E 上的 $a.e.$ 有限的可测函数.

26, 设 $f(x), \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上的 $a.e.$ 有限的可测函数. 若有 (1), $mE < \infty$, (2), $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $a.e.$ 于 E. 证明:

(i), 任给 $\epsilon > 0$, 存在集合 $e \subset E$, 以及正数 M, 满足 $m(e) < \epsilon$, 且有 $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in E \setminus e$, 即 在 $E \setminus e$ 上一致有界.

(ii), 试举例说明在 (i) 中结论不能改为 $me = 0$, 即几乎处处收敛推不出几乎处处有界.

(ii), 任给 $\epsilon > 0$, 存在集合 $e \subset E$, 以及正数 M, 满足 $me < \epsilon$, 且有 $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in E \setminus e$, $n = 1, 2, ...$

27, Lusin逆定理: 设 $f(x)$ 为可测集 E 上的函数. 若对任意 $\delta > 0$, 恒存在闭集 $F \subset E$, 使得: (i), $m^*(E \setminus F) < \delta$, (ii), $f(x)$ 在 F 上连续, 则 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测的函数.

28, (Frechet定理)设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的 $a.e.$ 有限的函数. $f(x)$为可测函数的充要条件存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ a.e.\, x \in E.$$

29, 设 $mE < \infty$. 则在 E 上 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$ 充要条件是对任意的子函数列 $\{f_{n_i}(x)\}$, 存在 $\{f_{n_i}(x)\}$ 的子函数列 $\{f_{n_{i_j}}(x)\}$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{i_j}}(x) = f(x),\ a.e.\, x \in E.$$

☞ 第五章: 积分理论

30, 设$f(x)$ 为可测集E上的可积函数, 则

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f| \geq n] = 0,$$

和

$$\lim_{n\to\infty} n(mE[|f| \geq n]) = 0.$$

31, 设$f(x)$ 为$E = [0, 1]$上的正值可测函数, $\{E_n\}$为E的可测子集列. 若有

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $m\big(\varliminf_{n\to\infty} E_n\big) = 0.$

32, 设$f_n(x)$ 为可测集E上的非负可积函数列, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = 0$, 则 $f_n(x) \Rightarrow 0$.

33, 设$f_n(x)$在可测集E上可测, 若

$$\int_E |f_n(x)|dx < \frac{1}{2^n},$$

则存在E上的可积函数$f(x)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x),$$

a.e.于E.

34, 设$f_n(x)$在可测集E上非负可测函数, 若 $f_n \longrightarrow f\, a.e.$于$E$且有 $\int_E f_n \longrightarrow \int_E f$ 和 $f \in L(E)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| = 0.$$

35, 设 $f \in L(\mathbb{R}), t > 0$, 证明: 对 $a.e.\, x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n^t} = 0.$$

36, 设 $E \in \mathbb{R}$为可测集, 证明: 对 $a.e.\, x \in E$

$$\lim_{t\to 0}\frac{m(E\cap[x-t, x+t])}{2t} = 1.$$

37, 设 f 是E上的可测函数, $p > 0, |f|^p \in L(E)$, 则

$$\int_E |f|^p\, dx = p\int_0^\infty t^{p-1} mE[|f| > t]\, dt.$$

38,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|} = 0 \quad \text{当且仅当} \quad f_n \Rightarrow 0.$$

39, $f \in L[a, b]$. $\forall \epsilon > 0, \exists g \in C[a, b]$, s.t.,

$$\int_a^b |f - g| < \epsilon.$$

40, 计算积分 $\int_0^1 f$.

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & x\text{为}[0,1]\text{上的无理数;} \\ x^2, & x\text{为}[0,1]\text{上的有理数} \end{cases}$$

Guanghua Ji · 纪广华
School of Mathematics
Shandong University
Jinan, Shandong 250100
www.prime.sdu.edu.cn/ghji/guanghuaji.htm