山东大学数学学院
2009级泛函分析期末试题

注意: 所有数学符号都是使用教材中的标准符号. 所有试题请写出详细计算或证明过程. 考试时间: 2012/01/12, 14:00-16:00.

1(10'), 证明: 距离空间中的任何Cauchy序列都是有界的.

2(10'), 设 (X,d) 为紧距离空间, 映射 $T: X \longrightarrow X$ 满足:

$$d(Tx, Ty) < d(x,y), \quad \forall x, y \in X, x \neq y.$$

证明: T 在X中有唯一不动点.

3(15'), 设 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是Hilbert 空间 H 的一正规正交基, $(c_1, c_2, \cdots) \in \ell^2$. 证明: 存在唯一的 $x \in H$, 使得:

$$(1), (x, e_k) = c_k,\ k = 1, 2, \cdots. \quad (2), \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

4(10'), 赋范线性空间 $C[0,1]$ 其范数为 $\|x\| = \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$. 定义其上的线性泛函 T, S 分别为

$$T:\ x(t) \longmapsto \int_0^1 x(t)dt,$$

$$S:\ x(t) \longmapsto \int_0^1 x(t)dt + x\left(\frac{1}{2}\right),$$

求 $\|T\|$, $\|S\|$.

5(10') 设 X 是 Banach 空间, 则对 $\forall x \in X$, 有

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|\ :\ f \in X', \|f\| \leq 1\}.$$

6(15'), (1), 叙述共鸣定理和闭图形定理. 并用共鸣定理或闭图形定理证明(2).
(2), 设 T 是从Hilbert 空间H到自身的处处有定义的线性算子. 若有,

$$(Tx, y) = (x, Ty), \quad \forall x, y \in H,$$

则 T是有界的.

7(10'), 设 X 为Banach空间, T是紧有界线性算子. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$, 则 $Tx_n \longrightarrow Tx$.

8(20'), 令$\ell^2 = \{x = (x_i) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$, 范数定义为 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 设$\{a_i\}$为一给定数列, 定义算子

$$T:\ (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, ...).$$

(1), 证明: $T \in L(\ell^2) \iff (a_i) \in \ell^\infty, i.e., \sup_i |a_i| < \infty$; 并求此时 $\|T\|$.
(2), 特别地, 若数列 $\{a_i\}$ 为区间 $[0,1]$的所有有理数集合, 求 T 的 $\sigma(T), \sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 以及 $\sigma_r(T)$.
(3), 判定(2)中的有界线性算子 T 是否紧线性算子?