

2009级数学学院复变函数论期末考试试题

考生注意:请将所有答案写在试卷纸上,写清楚题号不用抄原题.

一, 填空题

1(5'), 方程 $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ 的解为().

2(5'), 计算积分 $\int_{|z|=\frac{1}{6}} \frac{1}{z(3z+1)} dz$ 的值().

3(5'), 求复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^3}$ 的收敛半径和收敛圆().

4(5'), 将函数 $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 在圆环 $0 < |z| < 1$ 内展成Laurent级数().

5(5'), 函数 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z = 0$ 处的留数为().

6(5'), 方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内的零点个数为().

二, 计算题

7(10'), 计算积分

$$\int_C \bar{z} dz$$

的值, 其中 C 为从原点 $(0, 0)$ 到 $(1, 2)$ 的直线段.

8(10'), 求积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^3(z-3)^3}$$

的值.

9(20'), 求 $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$ 的所有的有限孤立奇点, 并指出何种类型的孤立奇点? 若有极点, 求此极点的阶和留数.

三, 证明题

10(15'), 设 $z = x + iy$, 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析, 且在 D 上恒有 $u(x, y)^2 = v(x, y)$. 试证 $f(z)$ 在 D 上恒为一常数.

11(15'), 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 上解析, 且 $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, 则

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!.$$